Дәріс 11
Біртекті жылу өткізгіштік теңдеулердің Коши есебін Фурье интегралының әдісімен шешу

Бұл мәселе осы

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (1)$$

теңдеуінің

$$u\big|_{x=0} = 0 \qquad u\big|_{x=l} = 0 \qquad (2)$$

шекаралық шарттарын және

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \qquad (3)$$

стапқы шартын қанағаттандыратын шешімін табудан тұрады, мұнда берілген $\varphi(x)$ функция үздіксіз, бөлек – бөлек үздіксіз туындыға ие және x = 0, $x = l$ де нолге айналады.

Фурье шартына сәйкес (1) теңдеудің дербес шешімдерін

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

түрінде іздейміз.Бұны (1) ге қойып,

$$X(x)T'(t) = a^2 T(t) X''(x)$$

немесе

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

теңдікке ие боламыз. Бұдан

$$T'(t) + a^2 \lambda T(t) = 0 \qquad (4)$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \qquad (5)$$

(2) шекаралық шарттарға қарағанда X(x) функция

$$X(0) = 0, \qquad X(l) = 0 \qquad (6)$$

шарттарын қанағаттандыруы қажетті.

(5) ,(6) есептің сәйкес мәндері

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{l^2}, \qquad n = 1,2,3,...$$

терден, ал сәйкес функциялары

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}$$

дан құралған. λ параметрдің $\lambda = \lambda_n$ мәндеріне (4) теңдеудің

$$T_n(t) = a_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 a^2}{l^2} t}$$

шешімдері сәйкес келеді. Мұнда a_n кез – келген тұрақты шама,

Содан

$$u_n(x,t) = a_n \sin \frac{n\pi x}{l} e^{-(\frac{n\pi a}{l})^2 t}$$

функция (1) теңдеудің және (2) шекаралық шарттарды қанағаттандырады.

Бастапқы (3) шартты қанағаттандыру үшін осы

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-(\frac{n\pi a}{l})^2 t} \sin \frac{n\pi x}{l} \qquad (7)$$

қатарды түземіз және

$$u(x,0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi x}{l} \qquad (8)$$

теңдіктің орындалуын талап етеміз.

(7) қатар берілген $\varphi(x)$ функцияның $(0,l)$ аралықта синус бойынша Фурье қатарына жайылуынан құралған.Оның коэффициенттері

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx \qquad (9)$$

формула мен анықталады.